

Gebruik voor de beantwoording van de onderstaande 4 vraagstukken antwoordvellen met daarop:

1) je naam, 2) het betreffende vraag- en onderdeelnummer.

Zet op het eerste antwoordvel het totaal aantal ingeleverde vellen.

vraag 1:

Gegeven het maximale verschil tussen twee waarden van een bandbegrensd signaal $s(t)$

met bandbreedte B en energiedichtheid E :
$$|s(t_2) - s(t_1)| \leq \left(\frac{\pi^2 B^3 E}{3} \right)^{\frac{1}{2}} |t_2 - t_1|.$$

- a) Laat zien dat bij een "sample en hold" versie van $s(t)$ met een bemonsteringsfrequentie $(1/T)$ van n maal de Nyquist-rate voor de fout ε van de "sample en hold" versie t.o.v. $s(t)$

halverwege twee monsters geldt:
$$\left| \varepsilon(nT + \frac{T}{2}) \right| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{(BE)^{\frac{1}{2}}}{n}$$

- b) Bespreek kort de betekenis van de foutafschatting gegeven in a) m.b.t. de afhankelijkheid van B, E en n .
c) Geef kort aan waarom de frequentierespons van een discreet lineair filter periodiek is. Geef daarbij ook de relatie met de frequentieinhoud van een (uniform) bemonsterd signaal aan.

vraag 2:

Beschouw het lineaire discrete filter waarvan de waarde op de uitgang, w_n , op tijdstip nT wordt gegeven door:

$$w_n = aw_{n-1} + bs_n, \quad (0 < a < 1)$$

waarbij s_n het discreteingangssignaal op tijdstip nT is, bestaande uit witte onafhankelijke Gaussische ruis met een gemiddelde gelijk aan nul en een variantie gelijk aan K/T .

- a) Geef aan of dit filter recursief of niet recursief is en maak een schematische schets van een mogelijke elektrische realisatie van dit filter.
b) Laat zien dat de autocorrelatiefunctie van het uitgangssignaal $R_w(k)$ voor $k = 0$, aan de autocorrelatiefunctie van het ingangssignaal gerelateerd is volgens:

$$R_w(0) = \frac{b^2}{1-a^2} R_s(0).$$

- c) Laat zien dat de autocorrelatiefunctie van het uitgangssignaal voor $k = 1$, gerelateerd is aan die van $k = 0$ volgens:

$$R_w(1) = aR_w(0)$$

- d) Toon aan dat ook voor $k \geq 2$ geldt:

$$R_w(k) = aR_w(k-1)$$

- e) Toon o.a. met gebruikmaking van de uitkomst van de vorige onderdelen aan dat geldt:

$$R_w(k) = \frac{a^{|k|} b^2}{1 - a^2} R_s(0) \quad \text{voor alle } k.$$

f) Laat mbv onderdeel e) zien dat het powerspectrum, $\hat{P}_w(f)$, van w wordt gegeven door:

$$\hat{P}_w(f) = \frac{b^2 K}{1 + a^2 - 2a \cos 2\pi f T}.$$

Gegeven: De Fouriertransform van de serie $\beta^{|n|}$ is: $\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos 2\pi f T}$ ($0 < \beta < 1$).

g) Laat zien dat de frequentierespons van het discrete filter wordt gegeven door:

$$\hat{H}(f) = \frac{b}{1 - a \exp(-i2\pi f T)}$$

h) Laat via de relatie $\hat{P}_w(f) = |\hat{H}(f)|^2 \hat{P}_s(f)$ zien dat hetzelfde antwoord voor $\hat{P}_w(f)$ kan worden gevonden als onder f).

Vraag 3:

Gegeven $s(t)$ gedefinieerd door: $s(t) = \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$ voor $t \geq 0$ en $s(t) = 0$ voor $t < 0$. Hierbij stelt τ een positieve tijdsconstante voor.

- Laat zien dat de Fouriertransform, $S(f)$, wordt gegeven door: $S(f) = \frac{\tau}{1 + i2\pi f \tau}$.
- Geef een uitdrukking van $|S(f)|^2$, en maak daarvan ook een schets waarbij $\frac{1}{\tau}$ expliciet op de frequentie-as wordt aangegeven.
- Geef een uitdrukking voor, en maak een schets van de convolutie van $s(t)$ met $\delta(t - t_0)$, waarbij t_0 een positieve konstante tijd ongelijk aan nul voorstelt.
- Geef kort aan (of schets met een toelichting) hoe de convolutie van $s(t)$ met $\cos(2\pi f_0 t)$ eruit ziet. Hierbij stelt f_0 een (positieve) vaste frequentie voor. (Hint: gebruik eventueel de eigenschap die geldt voor de Fouriertransform van een convolutie, uitgedrukt in de Fouriertransforms van de samenstellende functies).
- Bespreek kort waarom een (uniform) bemonsterde versie van $s(t)$ zoals boven gedefinieerd geen goede representatie van $s(t)$ is. Betrek in het antwoord de spectrale eigenschappen van de bemonsterde versie.

Vraag 4:

- Bespreek de voor- en nadelen van het periodogram als methode voor het bepalen van de spectrale inhoud van een stochastisch signaal. Betrek in het antwoord de nauwkeurigheid van de methode.
- Hoe kan de periodogram-methode worden uitgebreid om de nauwkeurigheid te verhogen?
- Beschrijf het powerspectrum van een deterministisch periodiek signaal.